2. Problemi scolastici nell'ottica del *problem solving*

Gianfranco Arrigo

In this paper, we focus on mathematical problems characterized by insufficient, redundant, irrelevant or incompatible data. Presenting the results of a research carried out in several primary schools of Lugano, we argue that the problem solving activities at the primary school should be proposed more frequently and carefully with respect to the current standard practice.

1. Introduzione

La letteratura concernente il concetto di problema è vastissima e abbraccia un ampio ventaglio di aspetti. La tematica è complessa al punto tale che risulta umanamente impossibile anche solo descrivere brevemente tutto quanto è stato concepito, osservato, sperimentato. Questo contributo è rivolto agli insegnanti di ogni grado scolastico e tratta dei problemi che si assegnano in classe. L'attenzione è posta sul tipo di problemi che stimolano l'allievo a intraprendere procedure indotte dalla mancanza di dati sufficienti oppure dalla sovrabbondanza degli stessi, particolarmente nel caso in cui alcuni dati si rivelino fra loro incompatibili.

I dati sono forniti da una sperimentazione eseguita da un gruppo di insegnanti delle scuole elementari della Città di Lugano, nell'ambito del corso di aggiornamento «Come far fronte alle difficoltà in matematica[1]».

2. Cenno agli aspetti teorici

Iniziamo da una prima doverosa distinzione: quella tra esercizio e problema (D'Amore, 1999).

«Si ha un esercizio quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare regole e procedure già apprese, anche se ancora in corso di consolidamento. Gli esercizi dunque rientrano nella categoria delle prove a scopo di verifica immediata o di rafforzamento.

Si ha invece un problema quando una o più regole o una o più procedure non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore; alcune di esse potrebbero essere proprio in quell'occasione in via di esplicitazione; a volte è la successione stessa delle operazioni risolventi a richiedere un atto creativo da parte del risolutore».

1. Il corso si è svolto nella primavera 2009, è stato condotto da G. Arrigo e G. Mainini e fa parte dell'offerta SMASI per gli insegnanti della scuola elementare.

Già nel 1945, il matematico ungherese George Polya, considerato un antesignano della teoria del *problem solving*, così si esprimeva (Polya, 1945)[2].

«Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano».

«(...) Quindi un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionate alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale».

Ecco che cosa ha scritto un altro famoso matematico, David Hilbert [1862-1943]:

«Finché un ramo di scienza offre un'abbondanza di problemi, allora è vivo; una mancanza di problemi prefigura l'estinzione o l'arresto di uno sviluppo indipendente».

Ora, anche se i problemi cui fa cenno Hilbert sono quelli della ricerca matematica, non c'è motivo per non estendere questa affermazione ai problemi scolastici.

Ci piace infine citare anche un passo del didatta F. Lester (1983):

«Un problema è un compito per cui l'individuo – o il gruppo che si confronta con esso – vuole o ha bisogno di trovare una soluzione; non c'è una procedura immediatamente accessibile che garantisca o determini in modo completo le soluzioni; l'individuo o il gruppo devono fare uno sforzo per trovare una soluzione».

Non credo si debba aggiungere altro: abbiamo precisato che cosa intendiamo con il termine «problema» e quale sia l'importanza della pratica dei problemi nell'educazione matematica.

Ora, come già detto, poniamo l'attenzione su un particolare genere di problema che presenta, rispetto a quelli tradizionali, anomalie riguardanti i dati. Sono problemi raramente proposti dagli insegnanti, che preferiscono problemi ed esercizi «ben congeniati», cioè con tutti i dati necessari e sufficienti, ben messi in rilievo nella consegna rigorosamente testuale. Li suddividiamo in due categorie:

– problemi con dati insufficienti
– problemi con dati sovrabbondanti

I primi potrebbero ancora essere distinti in due sotto-categorie: quelli in cui i dati esistono e si possono dunque cercare e quelli invece i cui dati possono essere «inventati» dal solutore.

Gli altri di nuovo possono essere di due tipi: quelli con dati coerenti e quelli con dati incompatibili.

2. Tutte le citazioni di questo paragrafo sono tratte da (D'Amore, 1999), testo fondamentale per chi desidera avvicinarsi alla didattica della matematica.

3. L'interrogativo di fondo e la metodologia adottata

Come reagiscono gli allievi di fronte a tali problemi? È questo l'interrogativo che ci siamo posti insieme agli insegnanti del corso sulle difficoltà in matematica. Per farci un'idea nostra, abbiamo deciso di effettuare una «mini-ricerca» in alcune classi delle scuole elementari. Gli insegnanti, inizialmente, erano piuttosto scettici sull'opportunità di una simile operazione; poi, discutendone, hanno accettato di provare. Hanno quindi ricevuto i testi di alcuni problemi che sono stati preventivamente analizzati durante il corso. A seconda della classe destinataria, i testi e i dati sono stati usati senza interventi o ritoccati, senza però tradire il significato didattico. Siamo riusciti a raccogliere dati nelle classi dalla terza alla quinta elementare[3]. Agli allievi è stata data una duplice consegna: cercare di risolvere ogni problema e redigere un commento in assoluta libertà. Secondo la maggior parte degli insegnanti, gli allievi si sarebbero trovati in seria difficoltà nel tentativo di risolvere e non avrebbero espresso granché nel commento.

4. Alcuni risultati

Fedeli alla domanda di fondo «come reagiscono gli allievi di fronte a questi problemi?», più che alle percentuali di riuscita, ci siamo interessati dei vari commenti espressi dagli allievi, commenti che abbiamo suddiviso in alcune categorie. Inoltre abbiamo ritenuto importante produrre esempi di risposte date dagli allievi: le abbiamo trascritte fedelmente, correggendo solo gli errori di ortografia. Negli enunciati dei problemi, i dati numerici indicati tra parentesi quadre sono semplificazioni apportate da qualche insegnante.

4.1. Problemi con dati insufficienti

1a) Laura e Marco vanno insieme al supermercato. Laura spende franchi 7,55 [8] e Marco spende franchi 18,75 [19]. Chi dei due alla fine ha più soldi in tasca?[4]

Tabella 1a)

1a)	Non si può risolvere	Non si può risolvere, con giustificazione pertinente	Ha più soldi Laura perché ha speso meno	Ha più soldi Marco	Totale allievi
f.a.	2	22	10	2	36
%	6	60	28	6	

Nonostante si ritenga, in generale, che un simile problema riveli subito la sua impossibilità, o, se si preferisce, la non pertinenza della domanda, abbiamo ottenuto un 34% di risposte contrarie. La maggior parte di questi allievi pensa che Laura, spendendo meno, si ritrovi alla fine con più soldi in tasca.

3. È stata coinvolta anche una classe seconda, per la quale è stato usato solo il problema «di Manuela» (vedere 4.2) adattato. I dati relativi non sono stati considerati in questo articolo.
4. Da un'idea di Bruno D'Amore; si veda ad esempio (D'Amore, 1999), pag. 111, ripreso in (D'Amore, 2003), pag. 21.

Soluzione: *«Ha più soldi in tasca Laura perché ha speso di meno».*
Commento: *«Questo problema non è molto difficile perché chi spende di meno ha più soldi».*

Una minoranza pensa che sia Marco ad avere più soldi (in generale, quindi anche alla fine) perché può permettersi di spendere di più.
Soluzione: *«Marco ha più soldi in tasca, può spendere di più, ha più soldi, prende più cose».*
Commento: *«Secondo me non c'è il calcolo ed è abbastanza semplice».*

Il calcolo: ecco un elemento fortemente presente nell'immagine mentale che gli allievi hanno del problema di matematica. Quando non c'è, o suscita disagio o lo si forza, realizzando così l'effetto «esigenza della giustificazione formale», per dirla con D'Amore[5]. Ecco un esempio:

«27–19=8 27–8=19 a Marco in tutto gli rimangono 8 fr e a Laura 19 fr».

L'allievo ha supposto che i due siano partiti con la stessa somma di franchi; perché proprio 27? Ma perché 27=19+8; anche il dato introdotto abusivamente viene così in un certo senso «giustificato».

1b) Dopo aver speso 65 franchi alla stazione di servizio e 670 franchi dal gommista, il signor Rossi va al bar dove beve un caffè e ne offre uno a un suo amico. Lascia al cameriere 70 centesimi [1 franco] di mancia. Quanto ha speso in totale?

Tabella 1b)

1b)	Non si può risolvere perché manca il prezzo del caffè	Non si può risolvere, senza giustificazione o con giustificazione non corretta	Risolve introducendo il dato mancante	Calcola la spesa tralasciando il caffè	Totale allievi
f.a.	11	4	3	16	34
%	32	12	9	47	

Circa un terzo degli allievi si limita a rispondere che manca un dato (il prezzo del caffè): risposta sicuramente accettabile, ma dettata dall'abitudine scolastica di considerare solo problemi con tutti i dati necessari per poter rispondere alla domanda. Solo una minoranza (3 allievi su 34) va oltre e si informa sul prezzo del caffè al bar e quindi risolve correttamente. Sappiamo che una delle differenze importanti tra il problema scolastico e il problema «reale» risiede appunto nel fatto che quest'ultimo si presenta il più delle volte senza dati (o con un numero insufficiente di dati). A differenza dei problemi «inventati» dagli insegnanti, i dati dei problemi reali esistono: basta andarli a cercare. Cercare dati è sicuramente anche un'attività formativa[6].

5. Si veda ad esempio (D'Amore, 2003), pag. 22.
6. Per un approfondimento, si veda (D'Amore, 2003), pag. 87.

Dei 3 allievi che hanno introdotto il prezzo del caffè, due hanno chiesto all'insegnante, mentre un terzo ha stabilito di fissare il prezzo a 70 centesimi, in modo da dare alla soluzione una «bella» struttura.

«85+670+(0,70 · 3)=757,10 In totale ha speso 757,10».

1c) Manuela sta organizzando la festicciola per il suo compleanno. Compera 30 paste a 2 franchi l'una, 30 lattine di bibita a 3,50 franchi l'una, 15 panini al prosciutto e 15 al salame. Quanti bimbi ha invitato?

Tabella 1c)

1c)	Non si può risolvere, con giustificazione pertinente	Non si può risolvere, senza giustificazione	Risponde 30 o 90 con giustificazione pertinente	Esegue un calcolo e ottiene 15 o 30 o 60 o 90 o 105	Risponde 30 o 15 perché «tutti i dati portano a 30 o a 15»	Totale allievi
f.a.	9	5	2	14	4	34
%	26	15	6	41	12	

Un terzo degli allievi risponde in modo accettabile: 9 allievi vedono l'impossibilità dovuta alla domanda non pertinente con i dati, mentre 2 allievi superano la difficoltà ipotizzando esplicitamente quante paste, lattine, panini prende ogni invitato.

A qualcuno dà fastidio il fatto che vi sono dati inutili.

Soluzione: *«Io non ho capito, cioè non so cosa fare».*

Commento: *«Era molto difficile perché i bambini cosa c'entrano con i dolciumi?»*

Commento di un altro allievo*: «Lo trovo pieno di trabocchetti! Parlava di soldi e poi non c'entravano un bel niente».*

La maggior parte non si accorge della non esistenza di una soluzione determinata e si lascia condurre dalla pratica scolastica o dal «buon senso».

Soluzione: *«Manuela ha invitato 30 bambini».*

Commento: *«È stato facile perché tutti i dati portano a 30 bambini».*

Ma ci sono anche i fantasiosi…

Soluzione: *«30+30+15+15=90*

Ha invitato 90 bambini».

Commento: *«Lo trovo abbastanza facile, ma mi sembra strano che abbia invitato 90 bambini».*

… e pure i «dogmatici».

Soluzione: *«In questo problema non so il calcolo ma so la risposta. R: Manuela per il suo compleanno ha invitato 15 bambini».*

Commento: *«Questo problema l'ho trovato molto difficile ma ce l'ho fatta».*

Un allievo vuole a ogni costo usare tutti i dati del problema, si accorge che qualcosa non va e propone un aggiustamento del testo.

Soluzione: *«30 · 2 = 60   30 · 3,50 = 105*
Questo problema non si può fare, ma se il problema dicesse: ogni invitato ha mangiato, es. 2 paste e non ne sono rimaste, ecc.».
Commento: *«Questo problema è insensato, ma aggiungendo delle spiegazioni si potrebbe risolvere».*

Infine un allievo mostra una certa «verve» matematica: è l'unico che ipotizza l'esistenza di più soluzioni, anche se la cattiva abitudine scolastica gli fa scrivere che se vi sono più soluzioni il problema non è risolvibile: peccato.
Commento: *«Io credo che questo problema non si può fare perché i bambini possono essere meno di 30 e più di 15».*

4.2. Problemi con dati sovrabbondanti e incompatibili

2a) Dopo aver speso in un negozio franchi 5,70 [6], in un altro negozio 17,50[18] e 2 franchi di parcheggio, al signor Bernasconi rimangono in tasca 20 centesimi [1 franco]. Era partito da casa con 25 franchi. Quanto ha speso in totale?

Tabella 2a)

2a)	Calcola e rileva l'incompatibilità	Calcola e non si accorge dell'incompatibilità	Non capisce o sbaglia	Totale allievi
f.a.	12	12	10	34
%	35	35	30	

Le tre categorie di risposte incontrano circa la stessa frequenza (1/3). Chi rileva l'incompatibilità la esprime in modi diversi. Si va dalla risposta particolareggiata…

«Non si può fare perché io ho fatto 17,50+5,70+2,00 e mi è venuto 25,20 e dice che era partito con 25,00 e dice che gli rimane 20 centesimi perciò avrebbe 24,80 e non si può fare perché mi viene 25,20».

… alle risposte sbrigative.

«Non funziona perché nel calcolo viene un numero più grande di quello che dovrebbe essere».
«Non si può fare perché i centesimi sono sbagliati».
«Il calcolo è impossibile perché arriva il risultato sotto zero».

Chi non si accorge dell'incompatibilità si accontenta di un solo iter risolutivo: o addiziona le tre spese o deduce dalla somma iniziale ciò che rimane alla fine.

2b) Marco va al supermercato con 50 franchi in tasca. Spende franchi 8,30 [8] in pasticceria e franchi 25,70 [26] in macelleria. Alla cassa dà la sua banconota da 50 franchi e riceve il resto di franchi 15,50 [15]. Quanto ha speso in tutto?

Tabella 2b)

2b)	Calcola e rileva l'incompatibilità	Calcola e non si accorge dell'incompatibilità	Non capisce o sbaglia	Totale allievi
f.a.	14	12	8	34
%	41	35	24	

Rispetto al problema 2a), l'equilibrio fra le tre (stesse) categorie delle risposte si spezza a favore di chi rileva correttamente l'incompatibilità dei dati. Vediamo alcune risposte significative.

Soluzione: *«8,30+25,70=34,00   50–15,50=34,50*
Nella cassa vengono 50 centesimi in più».

Commento: *«Lo trovo un po' difficile perché è a trabocchetto».*

Commento di un altro allievo: *«Questo problema non si può risolvere perché è sbagliato il resto».*

È interessante vedere traccia di una sofferenza interna data dal fatto che non si può giungere alla soluzione. Come già detto, ciò deriva dall'abitudine scolastica.

Soluzione: *«In questo problema hanno dato il resto sbagliato e quindi non posso risolverlo».*

Commento: *«Questo problema lo trovo molto difficile perché devi fare combaciare i numeri e poi trovi il risultato».*

Come dire: se i dati non «combaciano», sto male.

Risultano infine preoccupanti alcune soluzioni sbagliate, come per esempio la seguente.

Soluzione: *«26–8=18 In tutto ha speso 18 franchi»*

Commento: *«Sono rimasta tanto a ragionare tanto* [sic!] *ma dopo ce l'ho fatta, era molto difficile».*

5. Conclusioni

Non può esserci che una conclusione, che suona anche da esortazione agli insegnanti perché propongano più spesso e con molta cura «veri» problemi. Oltre ai soliti esercizi (detti impropriamente problemi) che propongono un insieme di dati necessari e sufficienti, schemi risolutivi obbligati conosciuti dagli allievi e soluzioni uniche, occorre proporre in classe situazioni nuove, alla portata degli allievi ma che, per essere risolte – per rispondere cioè ad alcuni interrogativi esplicitamente o implicitamente presenti nella situazione stessa – richiedono di organizzare diversamente le conoscenze acquisite o di spingersi un po' oltre le stesse. Con riferimento a Vygotskij[7], occorre fare agire gli allievi nella *zona di sviluppo prossimale*, in quell'ambito, cioè, in cui gli allievi possono mobilitare determinate loro conoscenze e, se necessario con l'aiuto dell'insegnante, giungere alla costruzione di nuove conoscenze.

7. Lev Semënovič Vygotskij (1896-1934), psicologo bielorusso.

Per fare ciò è però indispensabile staccarsi dai tradizionali esercizi e considerare problemi i cui iter risolutivi non siano del tutto conosciuti dagli allievi, i cui dati non siano sempre necessari e sufficienti alla risoluzione, le cui soluzioni non siano necessariamente univoche, le cui domande non siano sempre pertinenti e nemmeno sempre esplicitate. Procedendo così si dà agli allievi una formazione matematica decisamente migliore, la possibilità di uscire dal tradizionale «problema scolastico» e di aprirsi verso problemi sempre più vicini a quelli della vita reale.

Anche l'immagine della matematica come disciplina scolastica ne può trarre grande beneficio e perdere non pochi di quei luoghi comuni che contribuiscono a dipingerla come un «male necessario», una disciplina tecnica senza alcun valore culturale.

Bibliografia

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2003). *Problemi di matematica nella scuola primaria*. Bologna: Pitagora.

Polya G. (1945). How solve it. [Traduzione italiana: Milano, Feltrinelli, 1967].